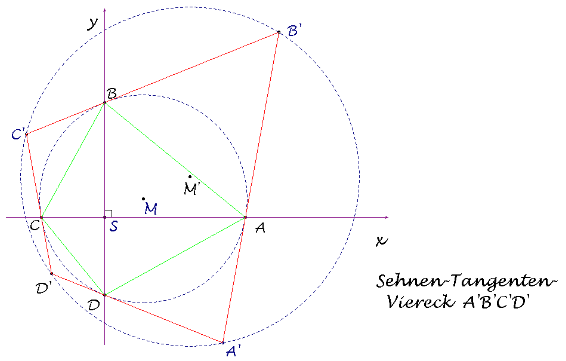
Sehnen-Tangenten-Vierecke
− kartesisch −

Eckart Schmidt

Schon die Schulgeometrie zeigt für Sehnen-Tangenten-Vierecke, dass die diagonalen Berühr-Sehnen orthogonal sind. Diese Eigenschaft wird hier für eine kartesische Behandlung von Sehnen-Tangenten-Vierecken aufgegriffen. Ausgangspunkt ist somit das Viereck der Berührungspunkte, mit dessen Größen das Sehnen-Tangenten-Viereck beschrieben wird. Dabei ergeben sich abschließend Invarianten für Vierecke „zwischen“ zwei Kreisen.



Ortho-diagonale Sehnen-Vierecke

Vor dem Hintergrund der abschließenden Thematik „Vierecke zwischen zwei Kreisen“ werden in dieser Ausarbeitung nur Sehnen-Tangenten-Vierecke $A'B'C'D'$ (kurz *ST*-Vierecke) betrachtet, deren Berühr-Sehnen-Vierecke *ABCD* (kurz *BS*-Vierecke) konvex sind. Diese ortho-diagonalen *BS*-Vierecke seien einleitend genauer untersucht.
Der Schnitt *S* der Diagonalen eines ortho-diagonalen Sehnen-Vierecks *ABCD* sei der Ursprung eines kartesischen Koordinaten-Systems; seine Potenz *p* bzgl. des Umkreises ist wegen der Konvexität eine negative Zahl. Dann lassen sich den Ecken eines *BS*-Vierecks folgende Koordinaten geben:

$$A(a;0),\quad B(0;b),\quad C(\frac{p}{a};0),\quad D(0;\frac{p}{b}).$$

Damit errechnen sich die Seiten- und Diagonalenlängen zu:

$$a=\sqrt{a^2+b^2},\quad b=\frac{\sqrt{p^2+a^2b^2}}{a},\quad c=\frac{-p}{ab}a,\quad d=\frac{a}{b}b,$$

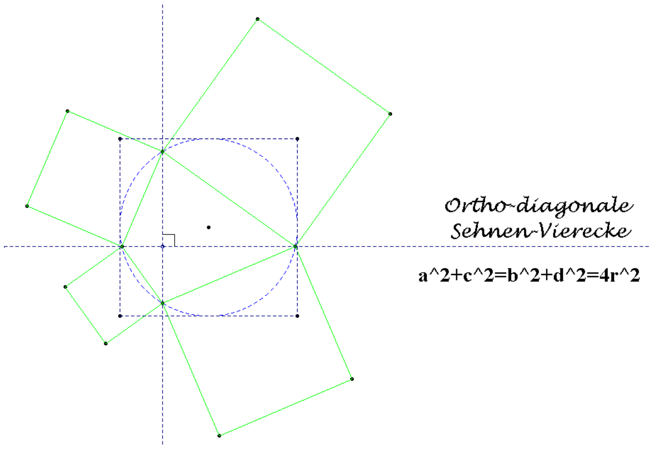
$$e=\frac{-p+a^2}{a},\quad f=\frac{-p+b^2}{b}.$$

Für die Parameter *a* und *b* gilt somit:

$$ab = -\frac{a}{c}p, \quad \frac{a}{b} = \frac{d}{b}, \quad d.h. \quad a^2 = -\frac{da}{bc}p, \quad b^2 = -\frac{ab}{cd}p.$$

In den Berechnungen wird immer versucht, parameterfreie Darstellungen zu erreichen, die geometrisch aussagekräftiger sind.
Umkreismitte und Radius ergeben sich zu

$$M(x_m; y_m) = M\left(\frac{p+a^2}{2a}; \frac{p+b^2}{2b}\right) \quad und \quad r = \sqrt{\frac{abcd}{-4p}} \; .$$



Mit diesen Berechnungsgrundlagen bestätigt man unmittelbar die beiden folgenden Sätze:

Satz 1. Für ortho-diagonale Sehnen-Vierecke ist die alternierende Summe der Seitenquadrate null und die Summe der Seitenquadrate das 8fache des Radiusquadrats:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4r^2 \; .$$

Die erste Aussage des Satzes gilt schon für ortho-diagonale Vierecke, die keine Sehnen-Vierecke sind [Alt,136].

Satz 2. Für ortho-diagonale Sehnen-Vierecke eines Kreises mit gleichem Diagonalenschnitt ist das Seitenlängenprodukt als auch die Quadratsumme der Diagonalenlängen konstant:

$$abcd = -4pr^2 \quad \textbf{und} \quad e^2 + f^2 = 4(r^2 - p) \; .$$

Damit ergibt sich die Potenz des Diagonalenschnitts in sehr übersichtlicher Weise aus den Seitenlängen:

$$p = -\frac{2abcd}{a^2+b^2+c^2+d^2} \; .$$

Abschließend seien einige weitere Eigenschaften ortho-diagonaler Sehnen-Vierecke zitiert, die sich mit den obigen Berechnungsgrundlagen analytisch bestätigen lassen.

(1) Vertauscht man in einem konvexen Sehnen-Viereck zwei benachbarte Seiten, so erhält man eine „dritte“ Diagonale.

Für ortho-diagonale Sehnen-Vierecke ist die „dritte“ Diagonale ein Durchmesser.

(2) Für ortho-diagonale Sehnen-Vierecke ist der Abstand der Umkreis-Mitte von einer Seite die halbe Gegenseite [Alt,138].

(3) Das Varignon-Viereck (Seitenmitten-Parallelogramm) eines ortho-diagonalen Sehnen-Vierecks ist ein Rechteck.

(4) Die Fußpunkte der Lote vom Diagonalenschnitt auf die Seiten und die Seitenmitten eines ortho-diagonalen Sehnen-Vierecks liegen auf einem Kreis [Alt,137].

(5) Die Senkrechten zu den Seiten durch den Diagonalenschnitt halbieren für ortho-diagonale Sehnen-Vierecke die Gegenseiten (Satz des Brahmagupta). Dieser Satz ist wohl der bekannteste über ortho-diagonale Sehnen-Vierecke und wird in der Literatur häufig zitiert: [Alt,137], [Hon,37], [Cox,59].

Sehnen-Tangenten-Vierecke

Geht man von einem ortho-diagonalen Sehnen-Viereck aus und betrachtet das zugehörige Tangenten-Viereck, so erhält man ein Sehnen-Tangenten-Viereck. In der obigen Beschreibung eines *BS*-Vierecks *ABCD* errechnen sich die Ecken dieses *ST*-Vierecks *A´B´C´D´* zu

$$A'(\frac{df}{2b};-\frac{de}{2b}),\quad B'(\frac{af}{2c},\frac{ae}{2c}),\quad C'(-\frac{bf}{2d},\frac{be}{2d}),\quad D'(-\frac{cf}{2a},-\frac{ce}{2a})$$

mit den Seitenlängen

$$a'=-\frac{daf}{2p},\quad b'=-\frac{abe}{2p},\quad c'=-\frac{bcf}{2p},\quad d'=-\frac{cde}{2p}$$

und den Diagonalen

$$e'=\frac{ac\sqrt{r^2-p}}{-p}\quad und\quad f'=\frac{bd\sqrt{r^2-p}}{-p}\ .$$

Für den Umkreis des *ST*-Vierecks ergeben sich Mittelpunkt und Radius zu

$$M'(\frac{r^2-p}{-p}x_m;\frac{r^2-p}{-p}y_m)\quad und\quad r'=\frac{r^2\sqrt{r^2-p}}{-p}\ .$$

Ein *ST*-Viereck und sein *BS*-Viereck haben den gleichen Diagonalenschnitt, der mit den Kreismitten *M* und *M´* kollinear liegt. Die Potenz des gemeinsamen Diagonalenschnitts bzgl. des Umkreises des *ST*-Vierecks errechnet sich zu

$$p'=-\frac{e^2+f^2}{4}=p-r^2,\ \text{d.h.}\ \frac{OM'}{OM}=\frac{p'}{p}\ \text{und}\ \frac{r'^2}{r^4}=-\frac{p'}{p^2}\ .$$

Satz 3. Ein Sehnen-Tangenten-Viereck und sein Berühr-Sehnen-Viereck haben den gleichen

Diagonalenschnitt, der mit den Kreismitten kollinear liegt. Die Abstände des Diagonalenschnitts von den Kreismitten verhalten sich wie die Potenzen bzgl. beider Kreise.

Es gibt zwei Typen von symmetrischen *ST*-Vierecken: Ist das *BS*-Viereck ein Kreisdrachen, d.h.

$$a = d, \quad b = c, \quad d.h. \quad ab = ef, \quad a^2 + b^2 = e^2 \ ,$$

so ist das *ST*-Viereck ein symmetrisches Trapez, dessen Schenkel die Länge der Mittelparallele haben:

$$b' = d' = \frac{a'+c'}{2} \ .$$

Ist das *BS*-Viereck ein symmetrisches Trapez mit orthogonalen Diagonalen, so ist das *ST*-Viereck offensichtlich ein Kreisdrachen.

Satz 4. Kreisdrachen und symmetrische Trapeze, deren Schenkel die Länge der Mittelparallelen haben, sind spezielle Sehnen-Tangenten-Vierecke.

Für den Kreisdrachen ist der Umkreisradius $r' = \dfrac{\sqrt{a'^2 + b'^2}}{2}$, und der Umkreismittelpunkt halbiert die Symmetriediagonale *A´C´*. Der Inkreisradius ist $r = \dfrac{a'b'}{a'+b'}$, und die Inkreismitte teilt die Symmetriediagonale im Verhältnis *a´:b´*.

Für das gleichschenklige Trapez mit der Schenkellänge $\dfrac{a'+c'}{2}$ ist der Inkreisradius $r = \dfrac{\sqrt{a'c'}}{2}$ der halbe Parallelenabstand und die Inkreismitte halbiert die Symmetrieachse *AC*. Der Umkreisradius ist $r' = \dfrac{b'\sqrt{b'^2 + a'c'}}{2\sqrt{a'c'}}$ und die Umkreismitte teilt die Symmetrieachse *AC* im Verhältnis $\dfrac{4a'c' + a'^2 - c'^2}{4a'c' - a'^2 + c'^2}$.

Die Eigenschaft von Tangenten-Vierecken, dass die alternierende Summe der Seitenlängen null ergibt, kann ebenso bestätigt werden wie der Satz des Ptolemäus mit folgenden Ergänzungen:

$$a'+c' = b'+d' = \frac{efr}{-p} \quad und \quad a'c'+b'd' = e'f' = 4r^2\frac{p-r^2}{p} \ .$$

Für die Gegenseiten eines *ST*-Vierecks gilt weiterhin:

$$\frac{a'}{c'} = \frac{a^2}{-p} = \frac{da}{bc} = \frac{OA}{OC} \quad und \quad \frac{b'}{d'} = \frac{b^2}{-p} = \frac{ab}{cd} = \frac{OB}{OD} \ ,$$

zusammengefasst in dem Satz:

Satz 5. Die Gegenseiten eines Sehnen-Tangenten-Vierecks verhalten sich wie die Abschnitte auf der Verbindungsstrecke der zugehörigen Berührpunkte.

Als weitere Verhältnisse von Seiten- und Diagonalenlängen seien aufgeführt:

$$\frac{a'}{b'}=\frac{df}{be},\quad \frac{b'}{c'}=\frac{ae}{cf},\quad \frac{c'}{d'}=\frac{bf}{de},\quad \frac{d'}{a'}=\frac{ce}{af},$$

$$\text{d.h. } \frac{a'b'}{c'd'}=\frac{a^2}{c^2},\quad \frac{d'a'}{b'c'}=\frac{d^2}{b^2},\quad \frac{a'c'}{b'd'}=\frac{f^2}{e^2}.$$

Auch für die Innenwinkel des *ST*-Vierecks lassen sich ergänzend zu der Supplementarität der Gegenwinkel Berechnungsgrundlagen mit den Größen des *BS*-Vierecks angeben:

$$\sin a'=\frac{f'}{2r'}=\frac{bd}{2r^2},\quad \sin b'=\frac{e'}{2r'}=\frac{ac}{2r^2}\ .$$

Ergänzt man eine Berechnung des Diagonalenschnittwinkels

$$\sin w'=\frac{2ef}{e^2+f^2}=\frac{ef}{2(r^2-p)}\ ,$$

so ergibt sich der folgende Satz:

Satz 6. Der Diagonalenschnittwinkel *w´* eines Sehnen-Tangenten-Vierecks errechnet sich aus den Innenwinkeln nach der Formel

$$\sin w'=\frac{\sin a'+\sin b'}{1+\sin a'\sin b'}\ .$$

Die Fläche eines *ST*-Vierecks als halbes Produkt des Umfangs und des Inkreisradius ergibt die Quadratwurzel aus dem Seitenprodukt [Cox,60], hier in der Ergänzung des folgenden Satzes.

Satz 7. Der Flächeninhalt eines Sehnen-Tangenten-Vierecks errechnet sich nach der Formel

$$F'=\sqrt{a'b'c'd'}=\frac{2r^2}{-p}F\ .$$

Dabei ist *F* die Fläche des zugehörigen *BS*-Vierecks als halbes Diagonalenprodukt.

Abschließend sei ein weiterer geometrischer Zusammenhang von *ST*-Viereck und zugehörigem *BS*-Viereck angesprochen:
Die Gegenseitenschnitte des *BS*-Vierecks *ABCD*

$$E\left(\frac{a(p-b^2)}{a^2-b^2};-\frac{b(p-a^2)}{a^2-b^2}\right)\quad und\quad F\left(\frac{ap(p-b^2)}{p^2-a^2b^2};\frac{bp(p-a^2)}{p^2-a^2b^2}\right)$$

sind Punkte auf den Diagonalen des *ST*-Vierecks. Sie liegen mit den Gegenseitenschnitten des *ST*-Vierecks *A´B´C´D´*

$$E'\left(\frac{p+a^2}{2a};-\frac{b(p-a^2)^2}{2a^2(p+b^2)}\right),\quad F'\left(-\frac{a(p-b^2)^2}{2b^2(p+a^2)};\frac{p+b^2}{2b}\right)$$

harmonisch auf einer Geraden mit der Gleichung

$$b(p+a^2)x+a(p+b^2)y-2pab=0\ ,$$

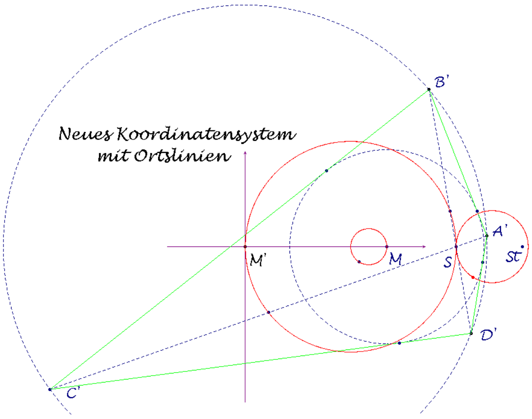
die gemeinsame Polare des Diagonalenschnitts bzgl. beider Kreise ist. Das Diagonaldreieck des *BS*-Vierecks ist das Diagonalendreiseit des *ST*-Vierecks.

Satz 8. Die Gegenseitenschnitte eines Sehnen-Tangenten-Vierecks und seines Berühr-Sehnen-Vierecks liegen in harmonischer Lage auf der gemeinsamen Polaren des Diagonalenschnitts bzgl. beider Kreise.

Vierecke zwischen zwei Kreisen

Ausgehend von der Konstellation eines Sehnen-Tangenten-Vierecks mit Um- und Inkreis erzeugt jedes orthogonale Geradenpaar durch den gemeinsamen Diagonalenschnitt ein weiteres *ST*-Viereck zwischen den Kreisen. Geht man andererseits von zwei Kreisen aus, einem Inkreis vom Radius *r* innerhalb eines Umkreises vom Radius *r´*, dann gibt es nur für einen bestimmten Mittenabstand *ST*-Vierecke zwischen den Kreisen. Dieser errechnet sich nach den obigen Berechnungsgrundlagen zu

$$MM'=\sqrt{r^2+r'^2-r\sqrt{r^2+4r'^2}}=\frac{r^2\sqrt{r^2+p}}{-p}\ .$$



Für weitere Aussagen über Vierecke zwischen zwei Kreisen, sei der Koordinatenursprung in die Mitte *M´* des Umkreises gelegt, der Mittelpunkt *M* des Inkreises und der gemeinsame Diagonalenschnitt *S* ergeben sich dann zu

$$M(m;0)=M\left(\frac{r^2\sqrt{r^2+p}}{-p};0\right)\quad und\quad S(s;0)=S\left(\frac{(r^2-p)\sqrt{r^2+p}}{-p};0\right).$$

Alle Größen, die sich nur mit *r* und *p* darstellen lassen sind Invarianten der *ST*-Vierecke zwischen den Kreisen.

Satz 9. Die Sehnen-Tangenten-Vierecke zwischen zwei festen Kreisen haben einen gemeinsamen Diagonalenschnitt und einen gemeinsamen Steiner-Punkt.

Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Satz 3. Der Steiner-Punkt (auch Miquel-Punkt) eines Vierecks ist der gemeinsame Punkt der Umkreise der Teildreiseite des zugehörigen vollständigen Vierseits. Für Sehnen-Vierecke erhält man den Steiner-Punkt, indem man den Diagonalenschnitt am Umkreis spiegelt:

$$St\left(\frac{r^4}{-p\sqrt{r^2+p}};0\right)$$

Eine weitere interessante Aussage folgt aus Satz 7:

Satz 10. Für Sehnen-Tangenten-Vierecke zwischen zwei festen Kreisen ist das Flächenverhältnis bzgl. der zugehörigen Berühr-Sehnen-Vierecke konstant:

$$\frac{F'}{F}=\frac{2r^2}{-p}\ .$$

Es liegt nahe, für Vierecke zwischen den Kreisen Ortslinien von Vierecks-Punkten zu betrachten. Die Berechnungen seien hier unterdrückt, da sie sehr aufwändig sind.

So liegen z.B. die Diagonalenmitten auf einem Kreis durch *M* und *S* mit der Gleichung $x^2+y^2-s\,x=0$. Die Verbindungsgeraden enthalten als Newton-Geraden der Vierecke alle die Inkreismitte *M*. Der Mittelpunkt der Diagonalenmitten, d.h. der Schwerpunkt, durchläuft einen Kreis durch *M* mit der Gleichung

$$\left(x-\frac{(p-3r^2)\sqrt{p+r^2}}{4p}\right)^2+y^2=\frac{(p+r^2)^3}{16p^2}\,.$$

Spiegelt man bei einem Sehnen-Viereck die Umkreismitte am Schwerpunkt, so erhält man das Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel des Vierecks; diese Zentren liegen somit ebenfalls auf einem Kreis.

Satz 11. Die Diagonalenmitten der Sehnen-Tangenten-Vierecke zwischen zwei festen Kreisen liegen auf einem Kreis, auf dem die Umkreismitte und der Diagonalenschnitt diametral liegen.

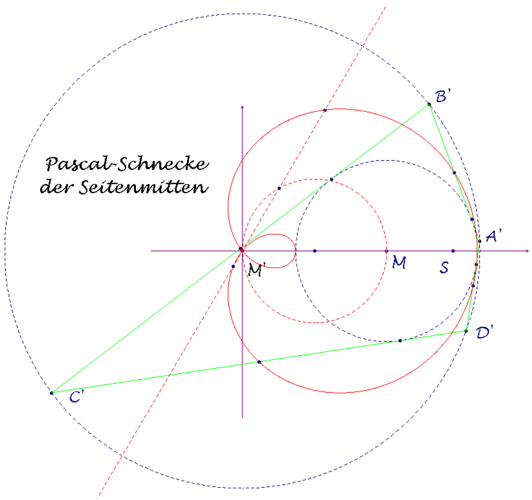
Die Seitenmitten der *ST*-Vierecke zwischen zwei Kreisen liegen auf einer Pascal-Schnecke mit der Gleichung

$$r^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2-mx)^2=0 \quad \textit{bzw.} \quad r(j)=\pm r+m\cos j$$

in Polarkoordinaten.

Satz 12. Die Seitenmitten der Sehnen-Tangenten-Vierecke zwischen zwei festen Kreisen liegen auf einer Pascal-Schnecke.

Konstruktiv erhält man diese Pascal-Schnecke, indem man von den zweiten Schnitten der Geraden durch *M´* mit einem Kreis zum Durchmesser *M´M* den Radius *r* des Inkreises beidseitig abträgt [Sch,125].



Literatur

[Alt] N. Altshiller-Court: College Geometry. – Dover Publications, 2007.

[Cox] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: Geometry Revisited. – New Mathematical Library 19, The Mathematical Association of America, 1967.

[Hon] R. Honsberger: Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. – New Mathematical Library 37, The Mathematical Association of America, 1995.

[Sch] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden,1949.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de